Att tömma tunnor

2025-7-23

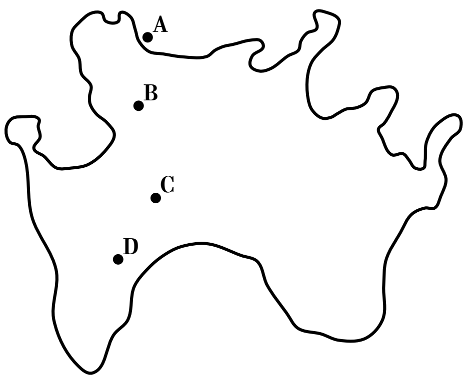
Sammanfattning

Om man skall tömma flera tunnor behöver man gå flera gånger. Hur kan man göra för att gå så få gånger som möjligt? Ja, genom att börja med de fyra första från platsen B och avsluta med de sista två vid platsen D. Snabbast går det om man slår ihop tunnor från platsen B. Att slå ihop tunnor från platsen D tjänar man föga på.

Inledning

På en liten ö i stockholms skärgård står sex tunnor. Varje tunna skall tömmas och sedan tvättas.

Tunnorna skall tvättas vid plats A i figur 1. På plats B står fyra tunnor. Tunnorna skall tömmas vid plats C. På plats D står två tunnor. Tunnorna transporteras med en kärra och endast en tunna kan transporteras i taget. Tunnorna är utbytbara, alltså kan en tunna från plats B lika gärna tömmas, tvättas och sedan placeras vid plats D som den kan återlämnas till plats B. När allt är klart skall det stå fyra tomma, rena tunnor på plats B och två tomma, rena tunnor på plats D.

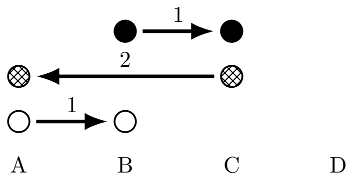


Figur 1: Karta över en liten ö i stockholms skärgård.

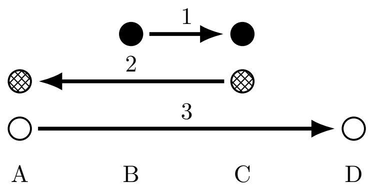
Analys

Man kan alltså till exempel starta vid plats B, gå med en tunna till plats C, tömma den, gå med den till plats A, tvätta den och till slut återlämna den till plats B. Detta illustreras schematiskt i figur 2(a) och vi kallar det en *rutt*.

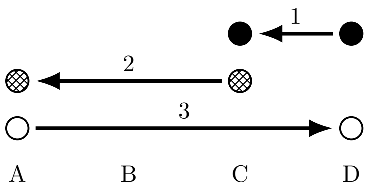
Avstånd mäts i *steg* och som en förenkling antas avstånden mellan A och B, B och C och mellan C och D vara lika.



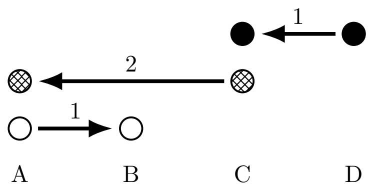
(a) Rutt r_1, från B till B.



(b) Rutt r_2, från B till D.



(c) Rutt r_3, från D till D.



(d) Rutt r_4, från D till B.

Figur 2: Fyra olika rutter.

Från figur 2 är det klart att alla fyra rutter börjar med en i steg räknat lika lång följd av två rörelser. Dessutom finns det två olika avslutande rörelser som är olika långa. Alltså, antingen börjar rutten från plats B och går via plats C till plats A eller så börjar rutten från plats D och går via plats C till plats A. I båda fallen är de lika långa. Rutterna slutar antingen med en rörelse från plats A till plats B eller med en rörelse från plats A till plats D.

$\|r_1\|$	$1+2+1=4$
$\|r_2\|$	$1+2+3=6$
$\|r_3\|$	$1+2+3=6$
$\|r_4\|$	$1+2+1=4$

Tabell 1: Ruttlängder.

För att beräkna det minsta antalet steg räcker det med att betrakta var rutten börjar. Då finns två varianter: rutter som börjar från plats B eller rutter som börjar från plats D. Rutternas längd är antingen 4 steg eller 6 steg, se tabell 1.

Målet är att behandla alla tunnorna. En *sekvens* av rutter beskriver hur och i vilken ordning tunnorna behandlas. I en sekvens finns sex rutter, där fyra måste utgå från plats B och två måste utgå från plats D.

Till en *delsekvens* av de fyra rutterna som utgår från plats B kan vi lägga till en rutt som utgår från plats D på fem olika sått, se figur 3.

$$(1) \quad r_B \quad (2) \quad r_B \quad (3) \quad r_B \quad (4) \quad r_B \quad (5)$$

Figur 3: Antal varianter med fyra rutter från B och en rutt från D

Efter vi har lagt till en rutt som utgår från plats D finns sex olika sätt att lägga till ytterligare en rutt som utgår från plats D. Det finns alltså 30 möjliga sekvenser av rutter. Men hälften av dem skiljer sig åt endast med vilken tunna från plats D som hämtas först så de kan anses vara lika. Alltså finns 15 olika sekvenser (tabell 2).

s_1	D	D	B	B	B	B	r_3	r_4	r_1	r_1	r_1	r_2	$\|s_1\| = 28$
s_2	D	B	D	B	B	B	r_4	r_2	r_4	r_1	r_1	r_2	$\|s_1\| = 28$
s_3	D	B	B	D	B	B	r_4	r_1	r_2	r_4	r_1	r_2	$\|s_1\| = 28$
s_4	D	B	B	B	D	B	r_4	r_1	r_1	r_2	r_4	r_2	$\|s_1\| = 28$
s_5	D	B	B	B	B	D	r_4	r_1	r_1	r_1	r_2	r_3	$\|s_1\| = 28$
s_6	B	D	D	B	B	B	r_2	r_3	r_4	r_1	r_1	r_1	$\|s_1\| = 28$
s_7	B	D	B	D	B	B	r_2	r_4	r_2	r_4	r_1	r_1	$\|s_1\| = 28$
s_8	B	D	B	B	D	B	r_2	r_4	r_1	r_2	r_4	r_1	$\|s_1\| = 28$
s_9	B	D	B	B	B	D	r_2	r_4	r_1	r_1	r_2	r_4	$\|s_1\| = 28$
s_{10}	B	B	D	D	B	B	r_1	r_2	r_3	r_4	r_1	r_1	$\|s_1\| = 28$
s_{11}	B	B	D	B	D	B	r_1	r_2	r_4	r_2	r_4	r_1	$\|s_1\| = 28$
s_{12}	B	B	D	B	B	D	r_1	r_2	r_4	r_1	r_2	r_4	$\|s_1\| = 28$
s_{13}	B	B	B	D	D	B	r_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_1	$\|s_1\| = 28$
s_{14}	B	B	B	D	B	D	r_1	r_1	r_2	r_4	r_2	r_4	$\|s_1\| = 28$
s_{15}	B	B	B	B	D	D	r_1	r_1	r_1	r_2	r_3	r_4	$\|s_1\| = 28$

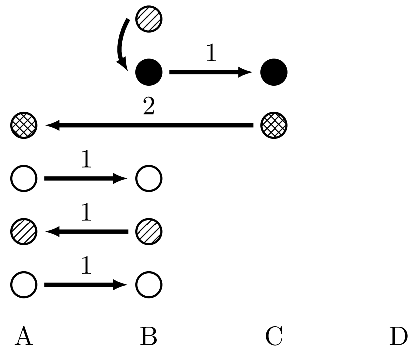
Tabell 2: Alla sekvenser.

Möjligen en smula överraskande är att alla sekvenser är lika långa. Värt att anmärka är att det naturligtvis är möjligt att skapa längre sekvenser genom att gå tomhänt från exempelvis plats D till plats B. Till exempel sekvensen $\langle r_3, r_3, D \rightarrow B, r_1, r_1, r_1, r_1 \rangle$, vars längd blir 30 (28 + 2). Sådana sekvenser är inte önskvärda.

Alla sekvenser slutar på samma plats som de börjar. Om man alltid utgår från platsen B är sekvenserna som startar från platsen D tre steg längre än alla sekvenser som börjar i platsen B.

Optimering

Det är tänkbart att det är möjligt att tömma en tunna i en annan för att slippa en tur till plats C. Denna manöver är lönsam endast för tunnor på platsen B eftersom endast en tunna kan transporteras åt gången och alla tunnor måste till A för att tvättas.



Figur 4: Rutt r_5, slå ihop tunnor från platsen B.

I sekvenser där det finns par av tunnor som utgår från platsen B kan alltså sparas en tur och retur till platsen C. Istället för delsekvensen $s_a = \langle r_1, r_1 \rangle$ med längden $|s_a| = 8$ får vi $s_b = \langle r_5 \rangle$ som har längden $|s_b| = 6$ och vi sparar två steg.

Optimeringen $s_a \to s_b$ kan utföras en gång för sekvenserna: s_2, s_4, s_7, s_9, s_{11} och s_{14} vilket resulterar i totalt 26 steg. Optimeringen kan utföras två gånger för sekvenserna: s_1, s_3, s_5, s_6, s_8, s_{10}, s_{12}, s_{13} och s_{15} vilket resulterar i totalt 24 steg.

> *Med ett avsteg från modellen, kan ytterligare två steg undvikas om man istället för att använda kärran som endast rymmer en tunna bär två tömda tunnor i varsin hand vid färden från* B *till* A.

Det är värt att överväga om riskerna med optimeringarna överväger förtjänsten.

Slutsats

Minst arbete med minst risk behöver man utföra om man utgår från platsen B och aldrig går tomhänt. Kan man tänka sig att slå ihop två tunnor två gånger kommer man undan med fyra steg mindre, alltså 24 steg istället för 28. Kan man dessutom tänka sig att bära två tunnor i varsin hand från B till A kan man undvika ytterligare två steg och då behöver endast 22 steg utföras.

Ett lämplig sekvens torde vara exempelvis s_{15} där man börjar med att hantera alla fyra tunnor vid platsen B och sedan tar hand om de två sista vid platsen D.