Kan man räkna ut π ("pi")?

M. Engan

2020-12-16

Sammanfattning

Här visas hur man kan använda en variant av Arkimetes metod för att beräkna π med godtyckligt antal decimaler.

Inledningsvis presenteras de geometriska grundbegrepp som behövs för att kunna angripa beräkningen av förhållandet mellan cirkelns omkrets och dess diameter, alltså konstanten π.

Sedan konstrueras en månghörning som inskrivs i en cirkel. Genom att beräkna månghörningens omkrets fås en uppskattning av π som stegvis kan förfinas. Till slut presenteras en mycket enkel algoritm i python för beräkning av π till den grad av precision som medges av pythons standardbibliotek för matematik (`math`).

1 Inledning

Min son Axel går i sjunde klass. En kväll tittade vi tillsammans på hans skolarbete i matematik. Det handlade då om geometri och bland annat cirkelns omkrets. Axel frågade hur man kan räkna ut π. Jag viftade lite med händerna och sa att det var krångligt. Det sade jag kanske för att jag själv inte visste hur det går till.

Naturligtvis fortsatte den obesvarade frågan att plåga mig. Jag var tvungen att lista ut hur man kan göra för att beräkna π. Som vanligt spårade det ur lite. Här nedan finns därför en rätt ordentlig förklaring av vår variant av Arkimedes sätt att beräkna π.

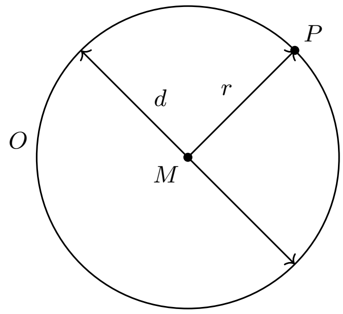
Vi börjar med cirkeln för att sedan gå igenom sådant vi behöver veta innan vi kan ge oss på att beräkna π.

2 Cirkeln

Cirkeln är en grundläggande geometrisk form. Ordet *cirkel* kommer från grekiskans *kirkos* och betyder ursprungligen ungefär ring. Många saker är runda, alltså cirkelformade eller cirkulära. Rondeller i trafiken, till exempel.

Definition 1 (Cirkel). [1] En cirkel är den kurva som bildas av en punkt som rör sig på ett konstant avstånd från en given punkt.

[1] En *definition* är när vi sätter namn på någonting. Det gör vi för att det skall bli lättare att resonera om olika saker.



Figur 1: Cirkel.

Punkten som cirkelns kurva bildas omkring kallas *mittpunkt*. I figuren ovan (figur 1) är mittpunkten markerad med M. En punkt på kurvan som bildar cirkeln ligger på cirkelns *periferi* och syns i figuren som P. Avståndet från mittpunkten till en punkt på cirkelns periferi kallas *radie* alltså r i figuren. En linje från en punkt på cirkeln, genom mittpunkten och till en annan punkt på cirkeln kallas *diameter* (d). Längden av den kurva som bildar cirkeln kallas *omkrets*, markerad O i figuren.

Innan vi börjar undersöka cirkeln närmare behöver vi beväpna oss med grundläggande kunskap om geometri.

3 Grunder

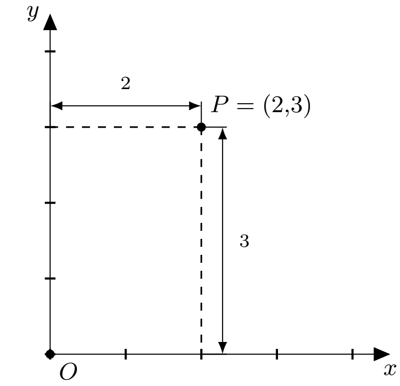
Först går vi igenom vi några egenskaper hos linjer och linjers vinklar för att sedan kunna fortsätta med triangeln. Vi börjar med det mest grundläggande begreppet, nämligen punkten.

3.1 Punkt

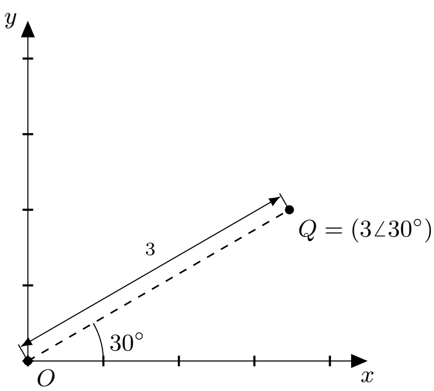
Ett av geometrins grundläggande begrepp är *punkten*. En punkt har ingen längd, ingen area och ingen volym. Vi tänker oss att en punkt anger en plats, position eller koordinat på ett plan.

Definition 2 (Punkt). En *punkt* är dimensionslös och beskriver en position.

Vi kan uttrycka en punkts position med dess koordinater (x, y). Till exempel punkten $(2, 3)$ som beskriver positionen två till höger och tre uppåt från ursprungspositionen. Det är också möjligt att beskriva en punkt i polära koordinater, alltså som ett avstånd och en vinkel. Ett exempel är koordinaten $(3\angle 60^\circ)$ som beskriver positionen med avståndet tre från ursprungspositionen och vinkeln 60° från ursprungsvinkeln. Det är vanligt att utgå från ursprungspositionen $(0, 0)$ som kallas *origo*.



Figur 2: Kartesisk koordinat.

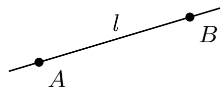


Figur 3: Polär koordinat.

3.2 Linjer och vinklar

En linje har ingen början och inget slut. Inte heller någon bredd. Den kan beskrivas med två punkter. En linje är *rak*, eller *rät*.

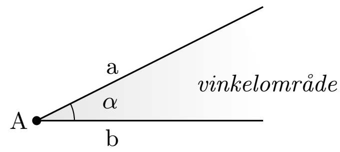
Definition 3 (Linje, stråle och sträcka)**.** En *linje* är en kurva där kortaste sträckan mellan två punkter på kurvan följer kurvan. En *stråle* är en linje som begränsas av en punkt på linjen. En *sträcka* är en linje som begränsas av två punkter på linjen.



Figur 4: Linje.

I figur 4 ser vi två punkter A och B som tillsammans definierar linjen l.

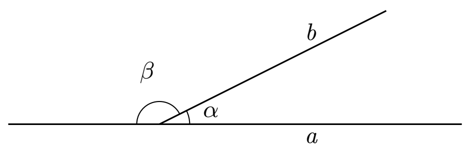
Definition 4 (Vinkel och hörn)**.** En punkt där två strålar möts kallas *hörn*. Två strålar som möts i ett hörn delar ett plan i två områden. Ett sådant område kallas *vinkelområde* eller *vinkel*.



Figur 5: Vinkel.

I figur 5 ser vi två strålar a och b som möts i punkten A. Strålarna a och b avgränsar vinkelområdet som bildar vinkeln α.

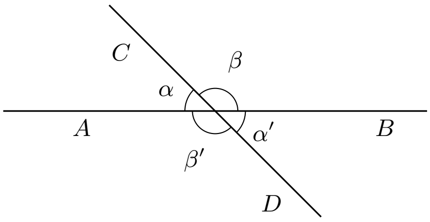
Definition 5 (Sidovinkel)**.** När två intilliggande vinklar bildar en linje (rät linje, rak vinkel, 180°) är de varandras *sidovinklar*.



Figur 6: Sidovinkel.

I figur 6 är linjen a en rät linje. Strålen b bildar tillsammans med linjen a två vinklar, α och β. Vinklarna α och β är varandras sidovinklar och tillsammans utgör de en rak vinkel.

När två linjer skär varandra i en punkt bildas fyra vinklar. I figur 7 är vinklarna α och β sidovinklar eftersom de ligger på var sin sida om linjen CD som korsar linjen AB. Även α och β' är sidovinklar, likaså β' och α' samt α' och β. I samma figur är de båda vinklarna α och α' *motstående* varandra. Även de båda vinklarna β och β' är motstående. Två motstående vinklar kalls för *vertikalvinklar*.



Figur 7: Vertikalvinklar.

Sats 1 (Vertikalvinklar)**.** [2] *Vertikalvinklarna är lika.*

Bevis. Båda vertikalvinklarna är sidovinklar till sina intilliggande vinklar och bildar parvis med dessa två raka vinklar. Därför måste vertikalvinklarna vara lika. □

För att förtydliga, låt x vara en rak vinkel. Då gäller för vertikalvinklarna α och α' samt dess sidovinkel β (se figur 7) att

$$\alpha + \beta = x \quad (1)$$
$$\beta + \alpha' = x \quad (2)$$

Vi ser att $\beta = x - \alpha$ och att $\beta = x - \alpha'$. Då kan vi skriva $x - \alpha = x - \alpha'$. Detta ger $\alpha = \alpha'$. Alltså att vertikalvinklarna α och α' är lika.

3.2.1 Parallella linjer och transversal

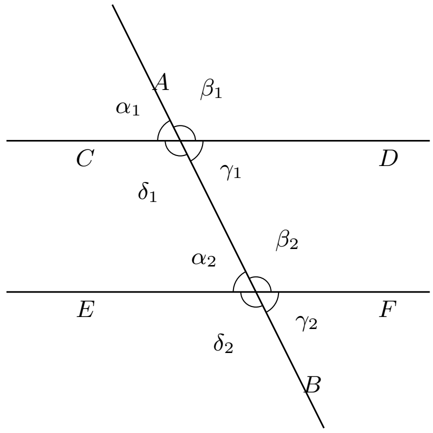
Två linjer kan antingen korsa varandra eller inte korsa varandra. Vi har tidigare sagt att två linjer som korsar varandra bildar en vinkel. Vi säger nu också att om två linjer inte korsar varandra och alltså inte bildar en vinkel, så är de *parallella.*

Definition 6 (Parallell)**.** Två linjer som inte korsar varandra är *parallella.*

Det är också så att om två linjer inte är parallella så korsar de varandra i en punkt. För två parallella linjer gäller att oavsett vilken punkt man väljer på den ena linjen är det minsta avståndet till en punkt på den andra linjen detsamma.

En linje som korsar två linjer kallas en *transversal.* Vi är i huvudsak intresserad av transversaler som korsar parallella linjer. En transversal som korsar två parallella linjer bildar åtta vinklar.

[2]En *sats* är ett påstående som kan (och har) bevisats. Ett sådant bevis utgår ifrån grundsatser, tidigare bevisade satser och logik.



Figur 8: Transversal.

De fyra vinklarna på insidan av (mellan) linjerna CD och EF kallas *inre vinklar* och de andra, på utsidan, kallas *yttre vinklar.*

Vinklarna på samma sida om transversalen och de båda linjerna kallas för *likbelägna vinklar.* I figur 8 är till exempel α_1 och α_2 likbelägna. Det är även δ_1 och δ_2 och så vidare.

De parvis motsatta vinklarna mellan två räta linjer och en transversal kallas *alternatvinklar.* I figur 8 är γ_1 och α_2 inre alternatvinklar, liksom δ_1 och β_2. Vinklarna β_1 och δ_2 samt α_1 och γ_2 är yttre alternatvinklar.

Axiom 1 (Parallell)**.** [3] *Om en transversal korsar två parallella linjer så är de båda linjernas likabelägna vinklar lika.*

Axiom 1 betyder att eftersom vinklarna α_1 och α_2 i figur 8 är likabelägna är de också lika. Om de inte vore det så korsas linjerna i någon punkt och därmed är linjerna inte parallella (definition 6).

Sats 2 (Parallelltransversalens alternatvinklar)**.** *Hos en transversal som korsar två parallella linjer är alla alternatvinklar lika.*

Bevis. En given vinkels alternatvinkel är densamma som den givna vinkelns likabelägna vinkels vertikalvinkel. Axiom 1 säger att två likabelägna vinklar är lika. Från sats 1 vet vi att vertikalvinklarna är lika. Därför är alternatvinklarna i en parallelltransversal lika. □

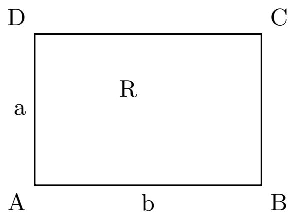
[3]Ett *axiom* är en grundsats. Man kan säga att det är ett påstående som är otvivelaktigt sant. Man kan också säga att det är en överenskommelse, eller konvention. Alltså är ett axiom som en sats eller ett teorem och kan användas som grund för ett fortsatt resonemang. Formellt betyder detta egentligen inte att ett axiom är sant eller falskt.

I figur 8 ser vi att den likabelägna vinkeln till α_1 är α_2 och de är lika enligt axiom 1. Vidare är α_2:s vertikalvinkel γ_2. Vi vet sedan tidigare (sats 1) att vertikalvinklarna är lika. Därför kan vi säga att vinkeln α_1 är lika med vinkeln γ_2. Men α_1 och γ_2 är varandras alternatvinklar. De är därmed lika.

3.3 Area

Emellanåt vill vi veta hur stor en geometrisk figur är. Ett mått på storlek är *area*. Arean är en kvantitet som uttrycker en geometrisk figurs utsträckning i planet. Vi kan definiera arean på flera olika sätt. Vissa definitioner är väldigt formella och kanske lite komplicerade. Här nöjer vi oss med att använda en rektangel som utgångspunkt.

Definition 7 (Area)**.** En rektangels *area* är rektangelns bredd gånger rektangelns höjd.



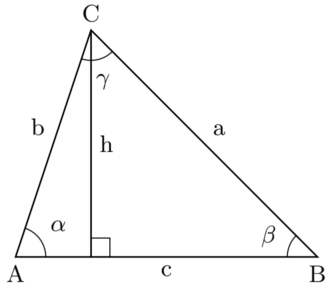
Figur 9: Rektangelns area.

I figur 9 ser vi rektangeln $ABCD$. Rektangeln har höjden a och bredden b. Enligt definition 7 är rektangelns area $R = ab$.

3.4 Triangeln

Triangeln är en av de grundläggande geometriska formerna. Den är en *polygon* eller en *månghörning*. Polygonerna är en samling geometriska figurer i planet som var och en bildar en sluten kurva som består av ett (ändligt) antal räta linjer.

Definition 8 (Triangel)**.** Triangeln är en tresidig polygon.

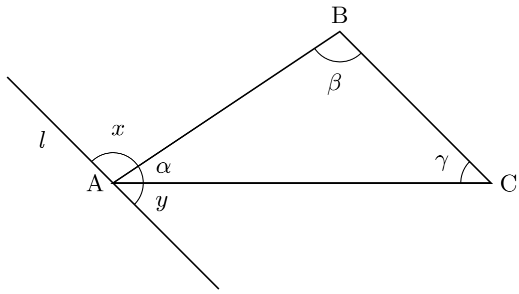


Figur 10: Triangel.

En triangel har tre *sidor* och tre *hörn*. I bilden (figur 10) ser vi triangeln ABC. Triangeln ABCs sidor är a, b och c och hörnen är A, B och C. Sidan a är *motstående sida* till hörnet A och hörnet A är *motstående hörn* till sidan a.

Mellan sidorna som utgår från ett av triangelns hörn bildas en av triangelns tre vinklar. Till exempel, från hörnet C i figur 10 utgår sidorna a och b. Vinkeln mellan sidorna är γ.

Triangelns *höjd* är det minsta avståndet från ett hörn till hörnets motstående sida, i figuren visas höjden h från C till sidan c.



Figur 11: Vinkelsumma.

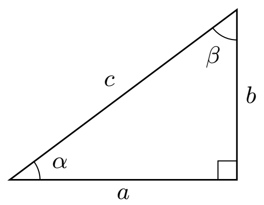
Sats 3 (Triangelns vinkelsumma)**.** *Summan av triangelns inre vinklar är 180°.*

Bevis. Triangelns vinkelsumma är summan av vinklarna α, β och γ i figur 11. Linjen l tangerar hörnet A och är parallell med hörnets motstående sida BC. Linjerna AB och AC är då två parallelltransversaler till linjerna l och BC.

Vinklarna x, α och y i figuren bildar tillsammans en rak vinkel (180°). Vinkeln x är vinkeln β:s alternatvinkel och vinkeln y är vinkeln γ:s alternatvinkel. Sats 2 säger att en parallelltransversals alternatvinklar är lika, vilket ger att $x = \beta$ och $y = \gamma$. Det betyder att vinklarna β, α och γ tillsammans utgör en rak vinkel. Därför är triangelns vinkelsumma $180°$. □

3.5 Rätvinkliga trianglar och Pythagoras sats

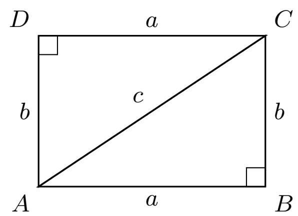
En *rätvinklig triangel* är en triangel där en vinkel är rät ($90°$). Sidan som är motstående sida till den räta vinkeln kallas *hypotenusa*. Var och en av de båda sidor som bildar den räta vinkeln kallas *katet*. I figur 12 är sidan c triangelns hypotenusa och sidorna a och b är kateterna.



Figur 12: Rätvinklig triangel.

Pythagoras (ca 570 f Kr - ca 497 f Kr) var en gammal grek. Han föddes på en ö som heter Samos. Man tror att hans far var köpman. Pythagoras antas ha studerat i Egypten. Omkring 530 f Kr tros Pythagoras ha flyttat till Crotone. Idag är Crotone en stad i Kalabrien i Italien, på den tiden var det en Grekisk koloni. I Crotone grundade Pythagoras en skola. Idag skulle skolan likna ett kloster. Medlemmarna avgav ett löfte att följa regligiösa och asketiska regler samt att studera religiösa och filosofiska teorier.

Det var inte Pythagoras som först upptäckte det viktiga sambandet mellan längden hos sidorna i en rätvinklig triangel. Sambandet hade varit känt under hundratals år före Pythagoras, både i Babylonien och i Indien. I texter av dåtidens författare hänvisades till Pythagoras i samband med att sambandet beskrevs. Därmed etablerades till slut namnet Pythagoras sats.



Figur 13: Rätvinkliga triangelns area.

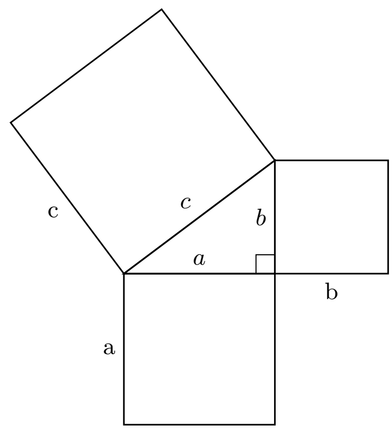
Sats 4 (Rätvinkliga triangelns area)**.** *Arean hos en rätvinklig triangel är hälften av längden av den ena kateten gånger längden av den andra kateten.*

Bevis. En rätvinklig triangel ABC med ena kateten AB av längden a och andra kateten BC av längden b har samma area som en annan rätvinklig triangel ADC med samma längd på kateterna.

Tillsammans bildar de, hypotenusa mot hypotenusa, en rektangel (se bild 13). Definition 7 ger arean av denna rektangel som ab. Båda trianglarna har samma area och tillsammans har de samma area som rektangeln.

Därför är arean av en rätvinklig triangel hälften av längden av den ena kateten gånger längden av den andra kateten. □

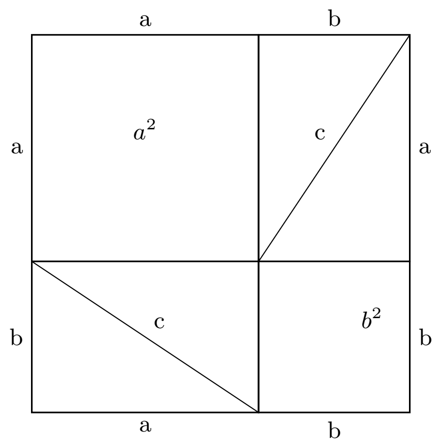
Sats 5 (Pythagoras)**.** *Kvadraten på hypotenusan är lika med summan av kvadraterna på kateterna.*



Figur 14: Pythagoras sats.

I figur 14 ser vi areorna av kvadraterna med samma sidlängd som den rätvinkliga triangelns sidor. Pythagoras sats beskriver ett samband mellan de olika kvadraternas areor. Alltså att arean av hypotenusans kvadrat (c^2) är lika med summan arean av katetrarnas kvadrater ($a^2 + b^2$).

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{3}$$



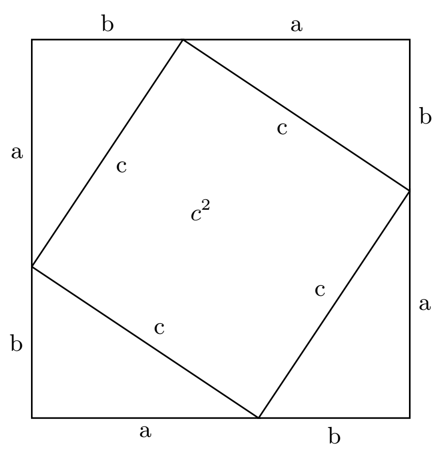
Figur 15: Pythagoras sats (1).

Bevis. För att visa Pythagoras sats arrangeras fyra likadana rätvinkliga trianglar på två olika sätt.

I figur 15 ser vi att de fyra trianglarna tillsammans med två kvadrater, den ena med sidan a och den andra med sidan b bildar en stor kvadrat med sidan $a+b$. Den stora kvadratens area är $(a+b)^2$.

I figur 16 ser vi en annan kvadrat med sidan $a+b$. Denna kvadrat bildas med de fyra trianglarna och en kvadrat med sidan c.

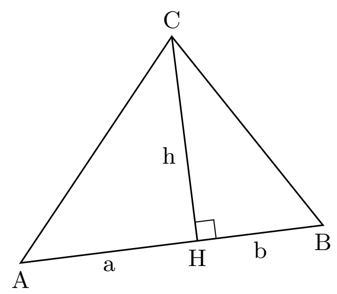
Arean hos den stora kvadraten och de fyra rätvinkliga trianglarna är lika i båda figurerna. Därför måste också arean hos kvadraten med sidan c vara lika med arean hos de båda kvadraterna med sidan a och b. □



Figur 16: Pythagoras sats (2).

3.6 Triangelns area

Vi kommer att behöva beräkna triangelns area. Vi vet redan hur man räknar ut arean av en rätvinlig triangel. Beväpnad med den kunskapen kan vi lista ut hur man räknar ut arean hos en godtycklig triangel.



Figur 17: Triangelns area.

Sats 6 (Triangelns area)**.** *Triangelns area är hälften av längden av triangelns bas gånger triangelns höjd.*

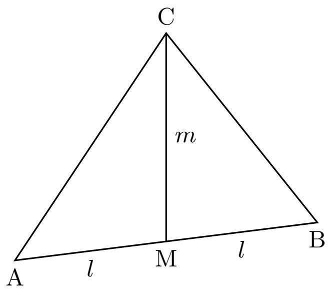
Bevis. Bilda två rätvinkliga trianglar genom att dela triangeln ABC med en linje CH som är vinkelrät mot triangelns bas AB. De två rätvinkliga trianglarna AHC och BHC har kateterna a och h respektive b och h. Sats 4 ger att arean av triangeln AHC är $ah/2$ och arean av triangeln BHC är $bh/2$. Arean av triangeln ABC är summan av areorna hos trianglarna AHC och BHC.

$$\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{(a+b)h}{2} \tag{4}$$

Men $a+b$ är basen hos triangeln ABC. Därför är triangelns area hälften av triangelns bredd gånger dess höjd. □

Innan vi studerar den liksidiga triangeln skall vi undersöka triangelns median och den generellare likbenta triangeln.

3.7 Median

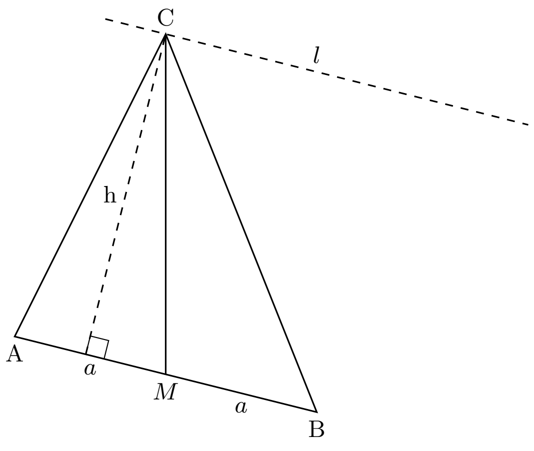


Figur 18: Median.

Definition 9 (Median)**.** En *median* är en linje från ett av en triangels hörn till mittpunkten av hörnets motstående sida.

I figur 18 ser vi en triangel ABC med medianen m. Medianen utgår från hörnet C till en punkt M som ligger precis mitt mellan A och B. Medianen delar en triangel i två och bildar då två andra trianglar. Det visar sig att de två nya trianglarna är lika stora, alltså har samma area.

Sats 7 (Lika area)**.** *Medianen delar en triangels area i två lika stora areor.*



Figur 19: Median och area.

Bevis. Låt M vara mittpunkten av sidan AB i triangeln ABC. Sträckan MC bildar en median i triangeln ABC. Medianen avgränsar triangeln ABC i två trianglar AMC och BMC.

Linjen l är parallell med AB och går genom C. Minsta avståndet mellan triangelns bas AB och linjen l är det vinkelräta avståndet mellan basen och linjen. Detta avstånd är lika med höjden av var och en av tre trianglarna ABC, AMC och BMC som alltså har samma höjd.

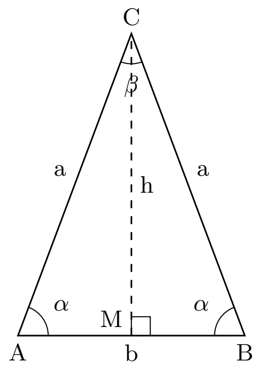
Sats 6 ger oss arean av triangeln AMC som är $ah/2$ och arean av triangeln BMC är också $ah/2$. Men arean av triangeln ABC är lika med arean av båda trianglarna AMC och BMC tillsammans och vi ser att medianen delar triangelns area i två lika stora areor.

□

3.8 Likbent triangel

I en likbent triangel som den i figur 20 är två sidor lika långa. Även de båda vinklarna som är motstående de lika långa sidorna är lika. Detta kanske är intutivt självklart. Det behöver ändå bevisas innan vi kan använda det för vårt vidare resonemang. Vi börjar med att definiera den likbenta triangeln.

Definition 10. En *likbent* triangel är en triangel där två av sidorna är lika långa.



Figur 20: Likbent triangel.

Sedan klargör vi vårt påstående i en sats som vi följer med satsens bevis.

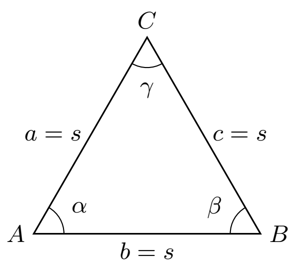
Sats 8 (Lika sidor, lika vinklar)**.** *Om två sidor av en triangel är lika långa är sidornas motstående vinklar lika.*

Bevis. Låt sidorna AC och BC vara två lika långa sidor i en likbent triangel (se figur 20). Kalla sidan AB för triangelns bas. Triangelns median är MC och den delar basen i två lika långa segment. Trianglarna AMC och BMC har då lika långa sidor, a, $b/2$ och h Två trianglar med lika långa sidor är lika. Därför är också vinklarna motstående de lika långa sidorna i en likbent triangel lika. □

3.9 Liksidig triangel

En *liksidig* triangel där alla sidor är lika långa. Det kan vi bevisa med hjälp av sats 8 som ju säger att om två sidor i en triangel är lika långa så är sidornas motstående vinklar lika.

Definition 11. En *liksiding* triangel har lika långa sidor.



Figur 21: Liksidig triangel.

Sats 9 (Liksidiga triangelns vinklar)**.** *I en liksidig triangel är alla vinklar lika.*

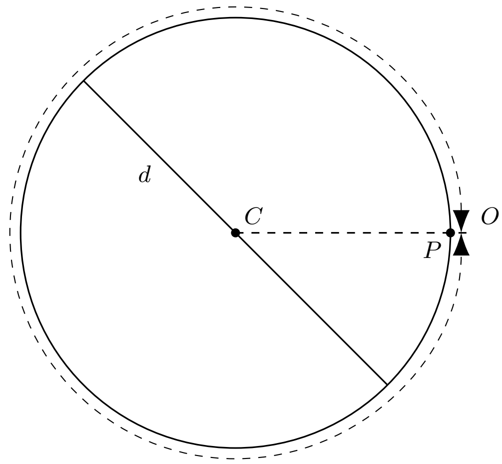
Bevis. En triangel ABC har lika långa sidor. Sidorna AC och AB är då två lika sidor i en likbent triangel. Deras motstående vinklar är lika enligt sats 8. Men sidorna AB och BC är också två sidor i en likbent triangel. Detta innebär att även deras motstående vinklar är lika. Alltså är alla vinklar i en liksidig triangel lika. □

Vi kan säga något mer om vinklarna i en liksidig triangel. Titta på den liksidiga triangeln i figur 21. I en triangel är vinkelsumman 180° (sats 3) och alltså är $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Eftersom vi nu vet, i och med sats 11, att vinklarna är lika måste alltså $\alpha = \beta = \gamma$. Därmed blir vinkelsumman $3\alpha = 180°$ och $\alpha = 60°$.

4 π

Nu, efter en genomgång av den bakgrund vi behöver, kan vi ge oss på att försöka lista ut vad π egentligen har för värde. Låt oss börja med att begrunda omkretsens förhållande till sin diameter.

I figur 22 ser vi en cirkel med center C och diameter d. Om vi mäter längden från en punkt P på cirkelns periferi hela vägen runt cirkeln tillbaka till P får vi cirkelns *omkrets*.



Figur 22: Omkrets.

Vi är intresserade av förhållandet mellan en cirkels diameter och samma cirkels omkrets. Det visar sig att samma förhållande gäller för alla cirklar. Noggrannheten varierar med mätmetoden och alla föremål som ser cirkelrunda ut är inte exakt cirkelrunda. Men oavsett vilken cirkel man mäter så kommer man till samma kvot mellan omkrets och diameter.

$$\frac{O}{d} \approx 3{,}14\ldots \tag{5}$$

Konstanten som beskriver förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter betecknas med den grekiska bokstaven π (“pi”). Troligen infördes beteckningen π för drygt trehundra år sedan som en förkortning av det grekiska ordet för periferi $\pi\epsilon\rho\iota\phi\epsilon\rho\epsilon\iota\alpha$.

π är ett irrationellt tal. Det betyder att det inte kan uttryckas som en kvot av två heltal, alltså $\pi \neq p/q$. π är inte bara irrationellt utan också transcendentalt vilket betyder att talet inte kan uttryckas algebraiskt. Med det menas att det inte är möjligt att skriva ett utryck på formen $\pi = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, där koefficienterna a_n är rationella tal och $n < \infty$.

Eftersom π är irrationellt kan vi aldrig bestämma π exakt. Skriver vi π som ett decimaltal (3,14...) kommer decimalerna fortsätta i all oändlighet och aldrig ta slut. Det inte heller möjligt att skriva ett uttryck för π eftersom π är transcendentalt.

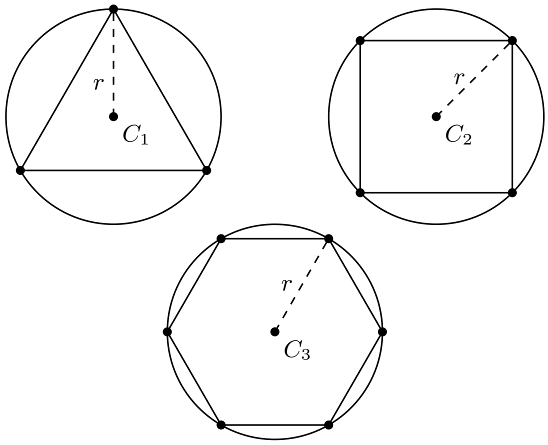
Besvärligt.

Det är däremot möjligt att beräkna π till godtyckligt antal decimaler. Vi skall utforska hur det kan gå till (det finns många olika sätt). Vi följer ungefär den metod som greken Arkimedes upptäckte drygt tvåhundra år före kristus.

4.1 En första uppskattning

Vi önskar bestämma π på något annat sätt än att mäta omkretsen av en cirkel med ett måttband. Skulle man kanske kunna tänka sig att jämföra med någon annan geometrisk figur?

I bild 23 ser vi tre olika försök. Att använda omkretsen av en triangel, eller av en kvadrat kan vi se med blotta ögat att det inte blir så bra. Men en sexhörning kanske skulle kunna funka?



Figur 23: (Dåliga) uppskattningar av Pi.

Titta på figur 24 där en regelbunden sexhörning inskrivits i en cirkel med diametern $2s_1$ (radien är s_1). Praktiskt för oss är att en regelbunden sexhörning bildas av sex lika liksidiga trianglar. Det gör att det är lätt att beräkna omkretsen, den blir helt enkelt $6s_1$.

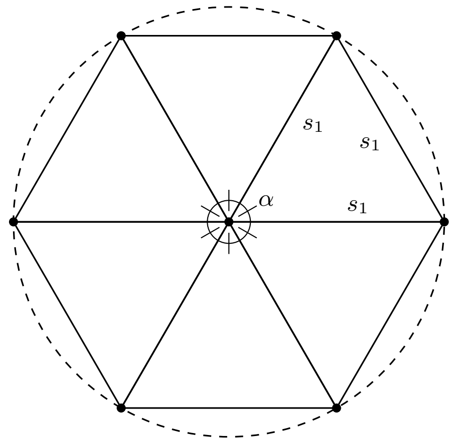
Med en regelbunden sexhörning som uppskattning av π får vi då

$$\hat{\pi} = \frac{O_6}{d} = \frac{6s_1}{2s_1} = 3 \tag{6}$$

I ekvation 6 uppskattar[4] vi alltså π till 3. Det är ingen jättebra uppskattning, den är nästan 5% fel (4,72%). Det kanske inte låter så jättemycket men om man skall bygga en rondell som är 50 m i diameter och med 10 m bred vägbana kan man tycka att omkring $15\,\mathrm{m}^3$ asfalt för lite faktiskt är ett problem. Vi måste göra bättre.

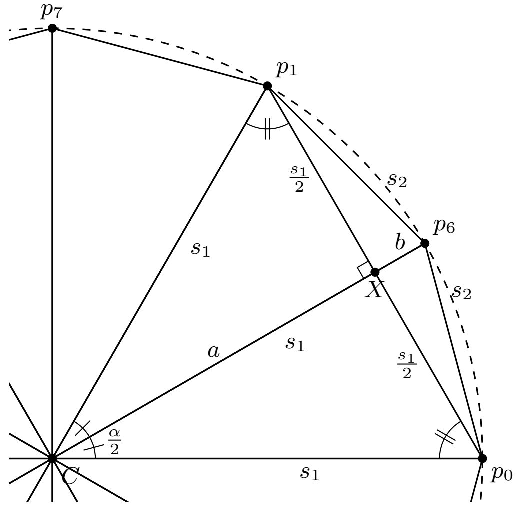
4.2 En bättre uppskattning

Vi har redan upptäckt att en regelbunden sexhörning är en hygglig uppskattning av π, men tyvärr inte tillräckligt bra. Vi ser i figur 24 att omkretsen av sexhörningen med sidorna s_1 är mindre än omkretsen av den omslutande cirkeln med diameter $2s_1$. Det har vi även verifierat, eftersom vår uppskattning i ekvation 6 ju gav 3 som är mindre än $3{,}14 \approx \pi$. Det är till och med så att varje regelbunden månghörning som inskrivits i en cirkel har en omkrets som är mindre än cirkelns omkrets.



Figur 24: Den första uppskattningan av pi.

Är det möjligt att göra en bättre uppskattning? Jajamensan. Om vi ökar antalet sidor i den regelbundna månghörning som vi inskriver i cirkeln borde uppskattningen bli bättre. Om vi fördubblar antalet sidor från sex till tolv borde det vara ganska enkelt att räkna ut omkretsen på den nya tolvhörningen.



Figur 25: En bättre uppskattning av pi.

I figur 25 ser vi en förstoring av den övre högra kva-

[4] När vi skriver $\hat{\pi}$ så betyder det att $\hat{\pi}$ är en uppskattning (eller ett estimat) av det verkliga värdet på π.

dranten av den ursprungliga cirkeln. Vår första uppskattning av π, sexhörningen, har sidorna s_1 i figuren. Vi går vidare genom att dela vinkeln mellan punkterna p_0 och p_1 i hälften och genom att lägga till punkten p_6. Då kan vi bilda två nya sidor mellan p_0 och p_6 samt mellan p_1 och p_6. Vi kallar längden av de två nya sidorna i vår tolvhörning för s_2. För att bilda tolvhörningen lägger vi till totalt sex nya punkter jämnt fördelade på cirkelns periferi, nämligen $p_6, p_7, \ldots p_{11}$.

Nu vill vi alltså beräkna längden av en sida i tolvhörningen. Vi är ute efter att räkna ut vad s_2 är.

Till att börja med kan vi konstatera att triangeln p_0Cp_1 är liksidig och som en konsekvens av sats 9 (Liksidiga triangelns vinklar) är alla vinklar i triangeln 60°.

Sträckan Cp_6 skär sträckan p_0p_1 i punkten X och delar sträckan p_0p_1 i två lika stora delar av längden $s_1/2$. Två av triangeln p_0CX vinklar måste då vara 60° och 30° vilket i sin tur innebär (triangelns vinkelsumma, sats 3) att vinkeln mellan segmenten Cp_6 och p_0p_1 är 90°. Vi minns att när två linjer korsar varandra så är vertikalvinklarna lika (sats 1) samt att summan av sidovinklar som bildar en rät linje är 180° (definition 5). Detta, i sin tur, betyder att båda trianglarna p_0CX och p_0Xp_6 är rätvinkliga trianglar.

Vi är ju ute efter att beräkna längden på sidan s_2 och eftersom triangeln p_0Xp_6 är en rätvinklig triangel så kan vi göra det med hjälp av Pythagoras sats (sats 5) om vi känner längden på kateterna. Kateterna i fråga är sträckorna p_0X och p_6X vars respektive längder är betecknade som $s_1/2$ och b i figuren.

Vi vet att längden av sträckan Cp_6 är s_1 och den är också $a + b$ vilket alltså betyder att $b = s_1 - a$. Kan vi beräkna a?

Ja. Eftersom p_0CX är en rätvinklig triangel och eftersom vi känner längden av två av sidorna (s_1 och $s_1/2$) så kan vi använda Pythagoras sats (sats 5).

$$\begin{aligned}
s_1^2 &= a^2 + \left(\frac{s_1}{2}\right)^2 \\
a^2 &= s_1^2 - \left(\frac{s_1}{2}\right)^2 \\
a^2 &= s_1^2 - \frac{s_1^2}{4} \\
a^2 &= \frac{3}{4}s_1^2 \\
a &= \sqrt{\frac{3}{4}s_1^2} \\
a &= \frac{\sqrt{3}}{2}s_1 \qquad (7)
\end{aligned}$$

Då får vi b ur $b = s_1 - a$ och (7) enligt

$$\begin{aligned}
b &= s_1 - a \\
b &= s_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}s_1 \\
b &= s_1\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (8)
\end{aligned}$$

Nu vet vi b som är triangeln p_0Xp_6 ena katet, vi har $s_1/2$ som är längden av den andra kateten. Detta betyder att vi kan räkna ut hypotenusan s_2 med hjälp av Pythagoras sats (sats 5). Alltså sätter vi igång.

$$\begin{aligned}
s_2^2 &= \left(\frac{s_1}{2}\right)^2 + b^2 \\
s_2^2 &= \left(\frac{s_1}{2}\right)^2 + \left(s_1\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \\
s_2^2 &= \frac{s_1^2}{4} + s_1^2\left(1 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \\
s_2^2 &= \frac{s_1^2}{4} + s_1^2\left(1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}\right) \\
s_2^2 &= s_1^2\left(\frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4}\right) \\
s_2^2 &= s_1^2\left(2 - \sqrt{3}\right) \\
\sqrt{s_2^2} &= \sqrt{s_1^2\left(2 - \sqrt{3}\right)} \\
s_2 &= s_1\sqrt{2 - \sqrt{3}} \qquad (9)
\end{aligned}$$

Puh! Det var kanske lite krångligt. Nu har vi ett uttryck för längden på sidorna i den tolvsidiga månghörningen och vi kan använda dess omkrets som en uppskattning av π. Omkretsen av månghörningen är $O_{12} = 12s_2$ och dess diameter är (som förut) $d = 2s_1$. Vi beräknar vår nya uppskattning $\hat{\pi}$ som.

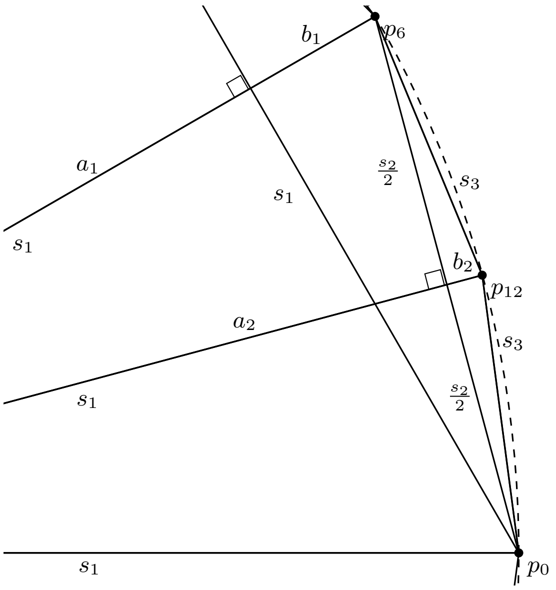
$$\begin{aligned}
\hat{\pi} &= \frac{O_{12}}{d} = \frac{12s_2}{2s_1} \\
\hat{\pi} &= \frac{12s_1\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2s_1} \\
\hat{\pi} &= \frac{12\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\
\hat{\pi} &= 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} \qquad (10)
\end{aligned}$$

Vi får ett nytt värde på $\hat{\pi}$ som är 3,106. Nu har vi förbättrat oss, vårt nya värde är bara ungefär 1,15% ifrån det verkliga värdet på π.

Skall vi bygga rondeller handlar det dessvärre fortfarande om felberäkningar på flera ton asfalt. Vi borde kunna göra ännu bättre genom att fortsätta på samma sätt, alltså genom att fördubbla antalet sidor i månghörningen och beräkna ett nytt värde.

4.3 Ännu bättre uppskattning

Liksom förra gången tar vi en figur till hjälp. Betrakta figur 26. Återigen har vi fördubblat antalet sidor i månghörningen, som nu har 24 sidor. Vi ser i figuren längderna s_1 och s_2 som vi redan beräknat. Nu är vi på jakt efter längden på sidan s_3.



Figur 26: Pi (3).

På samma sätt som tidigare ser vi att om vi kan beräkna b_2 så kan vi med hjälp av Pythagoras sats hitta s_3. Men hjälp av s_3 kan vi därefter beräkna en ny approximation av π.

Ur figur 26 kan vi bilda ett uttryck för b_2 eftersom s_1 är $a_2 + b_2$, dvs $b_2 = s_1 - a_2$. Vi ser också att a_2 tillsammans med $s_2/2$ är kateterna i en rätvinklig triangel med hypotenusan s_1. Alltså ges s_1 av Pythagoras sats (sats 5). Till sist är även s_3 hypotenusan i en rätvinklig triangel med kateterna b_2 och $s_2/2$. Vilket också ger s_3 med hjälp av Pythagoras sats (sats 5). Vi kan nu ställa upp ekvationerna (11), (12) och (13) nedan.

$$s_1 = a_2 + b_2 \quad (11)$$

$$s_1^2 = a_2^2 + \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \quad (12)$$

$$s_3^2 = b_2^2 + \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \quad (13)$$

Eftersom vi vill beräkna s_3 behöver vi veta b_2. Vi skriver om ekvation (11).

$$\begin{aligned} s_1 &= a_2 + b_2 \\ b_2 &= s_1 - a_2 \quad (14) \end{aligned}$$

Om vi kan bestämma a_2 kan vi också bestämma b_2. Vi skriver om ekvation (12) enligt nedan.

$$\begin{aligned} a_2^2 &= s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \\ a_2 &= \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2} \quad (15) \end{aligned}$$

Nu har vi a_2 i ekvation (15). Därmed kan vi uttrycka b_2 i s_1 och s_2 som båda är kända sedan tidigare, s_1 är cirkelns radie och s_2 ges av ekvation (9).

$$b_2 = s_1 - a_2 \quad (16)$$

$$b_2 = s_1 - \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2} \quad (17)$$

Vi går vidare, beväpnade med uttrycket för b_2 i ekvation (17) och Pythagoras sats applicerad på s_3 (ekvation 13). Från algebran vet vi att $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$. Detta är vad som händer mellan ekvation (18) och ekvation (19) nedan.

$$\begin{aligned} s_3^2 &= b_2^2 + \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \\ s_3^2 &= \left(s_1 - \sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \quad (18) \\ s_3^2 &= s_1^2 - 2s_1\sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2} + s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 \quad (19) \\ s_3^2 &= 2s_1^2 - 2s_1\sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2} \\ s_3 &= \sqrt{2s_1^2 - 2s_1\sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2}} \quad (20) \end{aligned}$$

Omkretsen av vår månghörning med 24 sidor O_{24} blir helt enkelt $O_{24} = 24s_3$ och diametern är fortfarande $d = 2s_1$. Vi beräknar $\hat{\pi}$ som

$$\begin{aligned} \hat{\pi} &= \frac{O_{24}}{2s_1} = \frac{24s_3}{2s_1} = 12\frac{s_3}{s_1} \\ \hat{\pi} &= 12\frac{1}{s_1}\sqrt{2s_1^2 - 2s_1\sqrt{s_1^2 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2}} \quad (21) \end{aligned}$$

Uttrycket i ekvation (21) ser ju lite besvärligt ut. Kan vi göra något för att förenkla det? Ja, vi har ju tidigare konstaterat att alla cirklar har samma förhållande mellan omkrets och diameter, dvs oavsett vilken cirkel man kontrollerar så blir kvoten O/d lika, nämligen π. Om vi skulle anta att radien är ett, dvs att $s_1 = r = 1$? Då faller uttrycket i ekvation (21) samman till följande.

$$\hat{\pi} = 12\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_2}{2}\right)^2}} \quad (22)$$

Men s_2 är $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ och om vi bestämmer s_1 till ett får vi följande resultat för vår uppskattning av π.

$$\hat{\pi} = 12\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2}}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\pi} &= 12\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{2-\sqrt{3}}{4}}} \\
\hat{\pi} &= 12\sqrt{2-2\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{2-\sqrt{3}}{4}}} \\
\hat{\pi} &= 12\sqrt{2-2\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}} \\
\hat{\pi} &= 12\sqrt{2-\frac{2}{2}\sqrt{4-2+\sqrt{3}}} \\
\hat{\pi} &= 12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} \qquad (23) \\
\hat{\pi} &\approx 3{,}1326
\end{aligned}
$$

Nu är vi bara 0,285% från det verkliga värdet av π. Asfalten till vår rondell kanske kommer att räcka. Det blir nog visserligen lite snålt, men kanske märks det inte.

4.4 Hur bra som helst

Det är givetvis möjligt att fortsätta rita figurer och fördubbla antalet sidor i månghörningen för att åstadkomma ännu bätre uppskattningar av π. Genom att begrunda figur 26 kommer vi fram till att uttrycket för s_4, dvs en månghörning med 48 sidor är mycket likt vårt redan bestämda uttryck för s_3.

Vi kan alltså generalisera uttrycket för s_3 till ett uttryck som går att använda för att bestämma längden på månghörningens sidor för godtycklig fördubbling av antalet sidor. Med hjälp av s_2 från ekvation (9) samt att $s_1 = r$ och ekvation (20) ovan får vi följande generella uttryck.

$$
\begin{aligned}
s_2 &= r\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad (24) \\
s_n &= \sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\left(\frac{s_{n-1}}{2}\right)^2}}, \quad n > 2 \qquad (25)
\end{aligned}
$$

Vi kan låta $r = 1$ och skriva s_n som

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sqrt{2s_1^2-2s_1\sqrt{s_1^2-\left(\frac{s_{n-1}}{2}\right)^2}} \\
s_n &= \sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{s_{n-1}^2}{4}}} \\
s_n &= \sqrt{2-\sqrt{4-s_{n-1}^2}} \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Om vi börjar med s_3 kan vi beräkna s_4. Med s_4 kan vi beräkna s_5, från s_5 får vi s_6 och så vidare. Antag att $s_1 = r = 1$. Vi ser i tabell 1 att efter endast fyra iterationer har vi ett ganska bra värde på π. Arkimedes, som för lite drygt tvåtusentvåhundra år sedan räknade för hand, orkade till 96-hörningen ($n = 5$). Vi skulle kunna fortsätta i all oändlighet. Men det är redan lite trist. Istället skulle vi kunna ta ett datorprogram till hjälp och räkna ut π till precis så många decimaler vi behöver. Till exempel 1000.

π = 3.14159265358979323846264338327950288419
7169399375105820974944592307816406286208998
6280348253421170679821480865132823066470938
4460955058223172535940812848111745028410270
1938521105559644622948954930381964428810975
6659334461284756482337867831652712019091456
4856692346034861045432664821339360726024914
1273724587006606315588174881520920962829254
0917153643678925903600113305305488204665213
8414695194151160943305727036575959195309218
6117381932611793105118548074462379962749567
3518857527248912279381830119491298336733624
4065664308602139494639522473719070217986094
3702770539217176293176752384674818467669405
1320005681271452635608277857713427577896091
7363717872146844090122495343014654958537105
0792279689258923542019956112129021960864034
4181598136297747713099605187072113499999983
7297804995105973173281609631859502445945534
6908302642522308253344685035261931188171010
0031378387528865875332083814206171776691473
0359825349042875546873115956286388235378759
3751957781857780532171226806613001927876611
1959092164201989

Figur 27: π med 1000 decimaler.

I figur 27 ser vi π med 1000 decimaler. Det är värt att nämna att för att göra beräkningar med så hög precision som 1000 decimaler behöver man lite speciell programvara. Det är inte svårt, men det ser krångligt ut, och för att förklara hur det går till är det bättre att nöja sig med en enklare variant. Det är inte särskilt besvärligt att använda vår (Arkimedes) metod för att skriva ett datorprogram som räknar ut π. Det behövs faktiskt bara några ynka rader kod.

```
import math as m

def pihat(n: int) -> float:

    s = m.sqrt(2-sqrt(3))
    for i in range (2, n+1):
        s = m.sqrt(2 - m.sqrt(4 - pow(s,2)))
    return 3*pow(2,n)*s
```

Figur 28: Estimera π i programmeringsspråket python.

I figur 28 ser vi ett enkelt pythonprogram som

n	s_{n-1}	s_n	$\hat{\pi}$
3	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	3,132 63
4	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	3,139 35
5	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	3,141 03
6	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$	3,141 45
...	...	...	...

Tabell 1: Approximationer av π.

beräknar π med vår metod. Funktionen `pihat` tar ett heltal som motsvarar antal fördubblingar av sidorna som argument och räknar ut motsvarande approximation av π. Först beräknas sexhörningens sida (s_2) och sparas i `s`. Därefter upprepas beräkningen av nästa sida med vår formel för s_n från ekvation (26) så många gånger som behövs. Till slut returneras värdet av `s` multiplicerat med antalet sidor delat med 2 som alltså skapar vår uppskattning av π.

```
engan@cube:~/proj/texts/pi$ python3
Python 3.8.5 (default, Jul 28 2020, 12:59:40)
[GCC 9.3.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or
"license" for more information.
>>> import pi
>>> pi.pihat(5)
3.1414524722853443
>>> pi.pihat(6)
3.141557607911622
>>> pi.pihat(7)
3.141583892148936
>>> pi.pihat(8)
3.1415904632367617
>>> pi.pihat(9)
3.1415921060430483
>>> pi.pihat(10)
3.1415925165881546
>>> pi.pihat(11)
3.1415926186407894
>>>
```

Figur 29: Resultat från algoritmen.

5 Sammanfattning

Sådärja. Vi har en bra uppskattning av π och vi kan fortsätta förbättra den iterativt till den precision vi behöver. Det behöver inte bli några rondeller utan asfalt.

Från de mest grundläggande geometriska konstruktionerna, punkt, linje, vinkel via transversaler och olika typer av trianglar har vi tagit oss till cirkeln. Vi har beräknat förhållandet mellan cirkelns omkrets och dess diameter. Det förhållandet, som kallas π, har vi sedan förfinat. Med några, på ytan, ganska enkla rader pythonkod kan vi räkna ut π till den grad av precision vi behöver.